Applications linéaires

Algèbre linéaire, épisode 2



I. Définitions, exemples

1 **Définition.**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* lorsque

$$\forall v, v' \in E, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{K}, \qquad f(\lambda v + \lambda' v') = \lambda f(v) + \lambda' f(v')$$

2 **Vocabulaire et autres notations très imporantes.**

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
- Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire* sur E.
  L'ensemble des formes linéaires sur E est noté $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.
- Lorsque $F = E$, on dit que f est un *endomorphisme* de E.
  L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.
- Lorsque $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est une application linéaire *bijective*, on dit que f est un *isomorphisme*.
- Lorsque $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme *bijectif*, on dit que f est un *automorphisme*.
  L'ensemble des automorphismes est noté $\mathrm{GL}(E)$.

3 **Proposition (propriétés immédiates).**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
Alors, on a :

— $f(0_E) = 0_F$

— $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall v_1, \dots, v_n \in E, \ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$.

— La restriction de f à un sous-espace vectoriel de E est une application linéaire.

4 **Exemples à très bien connaître.**

- L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ v & \longmapsto & 0_F \end{array}$, notée $0_{\mathscr{L}(E,F)}$, est linéaire : c'est l'application linéaire nulle.
- L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & 0_E \end{array}$, notée $0_{\mathscr{L}(E)}$, est linéaire : c'est l'endomorphisme nul.
- L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v \end{array}$, notée id_E, est linéaire : c'est l'endomorphisme identité.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & \lambda v \end{array}$, notée $\lambda\,\mathrm{id}_E$, est linéaire : c'est l'homothétie de rapport λ.

Une homothétie commute avec tout endomorphisme.
Si $\lambda \neq 0$, alors l'homothétie de rapport λ est un automorphisme dont l'endomorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

5 **Question.**

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & u_0 \end{array}$
   Montrer que f est une application linéaire. Est-ce que f est un isomorphisme ?
2. Soit $b, c \in \mathbb{K}$. Soit $F_{b,c} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \right\}$.

   Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} F_{b,c} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est un isomorphisme.

II. Opérations sur les applications linéaires

Rappel.
Soit F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (donc muni de loi + et ·), et Ω un ensemble quelconque.
Alors l'ensemble F^Ω est un espace vectoriel pour les lois + et · suivantes :

$$f+g:\ \begin{array}{rcl}\Omega & \longrightarrow & F\\ x & \longmapsto & f(x)+g(x)\end{array} \qquad \text{et} \qquad \alpha\cdot f:\ \begin{array}{rcl}\Omega & \longrightarrow & F\\ x & \longmapsto & \alpha\cdot f(x)\end{array}$$

En particulier, si $\Omega = E$ est un espace vectoriel, alors F^E **est un espace vectoriel** (on n'utilise rien de la structure d'ev de E pour définir cet espace vectoriel F^E).

6 **Proposition.** L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

- Cette proposition dit que l'application nulle est une application linéaire et que toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.
  Plus précisément
  — Soit $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $f+g \in \mathscr{L}(E,F)$.
  En français : *la somme de deux applications linéaires est linéaire.*
  — Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda\cdot f \in \mathscr{L}(E,F)$.
  En français : *en multipliant par un scalaire une application linéaire, on obtient une application linéaire.*

7 **Proposition (Opération de composition ∘ entre applications linéaires).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors $g\circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

- En français : *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*
- On a toujours l'énoncé « Chaussettes et chaussures ».
  Si f et g sont des isomorphismes, alors $g\circ f$ aussi et on a $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

8 **Proposition (bilinéarité de la composition).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Les applications

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G)\\ h & \longmapsto & h\circ f\end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl}\mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G)\\ h & \longmapsto & g\circ h\end{array}$$

sont linéaires.

- On dit que l'application

$$\Psi:\ \begin{array}{rcl}\mathscr{L}(E,F)\times\mathscr{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G)\\ (f,g) & \longmapsto & g\circ f\end{array}$$

  est bilinéaire, ce qui signifie que

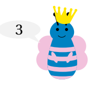
$$\Psi(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2, g) = \lambda_1\Psi(f_1,g)+\lambda_2\Psi(f_2,g) \qquad \text{et} \qquad \Psi(f,\mu_1 g_1+\mu_2 g_2) = \mu_1\Psi(f,g_1)+\mu_2\Psi(f,g_2)$$

9 **Proposition.**

Soit $f: E\to F$ est un isomorphisme (= une application linéaire bijective).

Alors sa bijection réciproque $f^{-1}: F\to E$ (aussi appelée son inverse) est une application **linéaire**.

- Lorsqu'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes.
  Le caractère symétrique de cette terminologie est justifié par la proposition précédente !



Cas particulier des endomorphismes

Opération de composition $\circ$ entre endomorphismes.

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes de E.
  Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des endomorphismes de E, en général différents.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
  Alors $f \circ f$ est un endomorphisme de E, noté f^2. On prononce « f carré », ou encore « f composé 2 fois »
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E et $k \in \mathbb{N}$.
  Alors $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ est un endomorphisme de E, noté f^k. On prononce « f puissance k », ou « f composé k fois »
- On a $f^0 = \mathrm{id}_E$
- Lorsque f est un automorphisme (endomorphisme bijectif), alors f^k est également un automorphisme et son automorphisme réciproque est noté f^{-k} (c'est f^{-1} composé k fois).

Proposition (opérations sur $\mathscr{L}(E)$)

- $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel pour les lois $+$ (loi interne) et $\cdot$ (loi externe).
  $\mathscr{L}(E)$ est muni d'une autre loi interne : l'opération de composition $\circ$.
  Cette loi possède id_E comme élément neutre, c'est-à-dire

  ....

  Ces trois lois $+$, $\cdot$ et $\circ$ vérifient :

  $$(f+g)\circ h = \ldots \qquad h\circ(f+g) = \ldots \qquad f\circ(\lambda\cdot g) = \ldots$$

- La loi $\circ$ est non commutative.
- Il n'y a pas de propriété d'intégrité : en présence de $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on ne peut rien dire.
- En maths, on dit que $\left(\mathscr{L}(E), +, \cdot, \circ\right)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Elle est non commutative, et non intègre.

10 **Proposition (formule du binôme de Newton).**
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes **qui commutent**.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^p = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

III. Noyau et image d'une application linéaire

11 **Proposition.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors l'image réciproque $f^{(-1)}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

12 **Définition/Proposition.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.
Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de E suivant :

$$\operatorname{Ker} f \;=\; \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\}$$

L'image de f est le sous-espace vectoriel de F suivant :

$$\operatorname{Im} f \;=\; \left\{y \in F \mid \exists x \in E,\, y = f(x)\right\}$$

13 **Question.** Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(M) \end{array}$ est une forme linéaire.
Déterminer une base de son noyau.

14 **Proposition (caractérisation de l'injectivité d'une application *linéaire*)**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application *linéaire*.

$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\}.$$

En français *Une application linéaire est injective* SSI *son noyau est réduit au vecteur nul.*

15 **Question.** Soit I un intervalle.
Montrer que l'application $D: \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^I \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est linéaire.
Est-elle injective ?

16 **Lemme très pratique (à connaître).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
L'égalité d'applications linéaires $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$ équivaut à l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

17 **Question.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $f^2 = f \circ f$ (c'est un endomorphisme de E).

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \iff f^2 = 0$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

IV. Applications linéaires et famille de vecteurs

Avertissement. Dans ce chapitre, il y a beaucoup de résultats qui nécessitent que l'espace de départ possède une famille génératrice **finie**. Bien sûr, tous les espaces vectoriels n'ont pas forcément une famille génératrice finie. Exemples ?

18 **Proposition (famille génératrice de l'image).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.
Soit $\mathscr{G} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice finie de E. Alors l'image de f est donnée par :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Morale de l'histoire : si l'on dispose d'une famille génératrice de l'espace de départ, on connaît une famille génératrice de l'image de f.

19 **Proposition.** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

— Soit $\mathscr{G}_E$ une famille génératrice de E.
Si f est surjective, alors $f(\mathscr{G}_E)$ est une famille génératrice de F.
Si $f(\mathscr{G}_E)$ est une famille génératrice de F, alors f est surjective.

— Soit $\mathscr{L}_E$ une famille libre de E.
Si f est injective, alors $f(\mathscr{L}_E)$ est une famille libre de F.

20 **Proposition (caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité avec une base de E)**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.
On suppose que $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ est **une base finie de E.**

— f est injective $\iff$ la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F.

— f est surjective $\iff$ la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille génératrice de F.

— f est bijective $\iff$ la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de F.

V. Caractérisation d'une application linéaire

21 **Proposition (définition d'une application linéaire par l'image d'une base)**
On suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est **une base finie de** E.
Pour toute famille $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $h \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $i \in [\![1, n]\!]$, $h(e_i) = v_i$.

En français :
« Une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base »

- Pour définir une application linéaire $h : E \to F$, il suffit de se donner les $h(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- Par exemple, l'endomorphisme de transposition de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique endomorphisme f tel que ...
- Par exemple, la forme linéaire trace sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique forme linéaire f telle que ...

22 **Proposition (égalité de deux applications linéaires)**
On suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est **une base finie de** E.
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ deux applications linéaires. On a :

$$\left(\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) = g(e_i)\right) \implies f = g$$

En français :
« Si deux applications linéaires coïncident sur une base, alors elles sont égales »

23 **Proposition (définition d'une application linéaire sur des sev supplémentaires).**
Soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E.
Alors pour toute application linéaire $h_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et toute application linéaire $h_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique application linéaire $h \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$h_{|E_1} = h_1 \qquad \text{et} \qquad h_{|E_2} = h_2$$

En français :
« une application linéaire est entièrement déterminée par sa restriction à des sous-espaces supplémentaires »

- Par exemple, l'endomorphisme de transposition de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique endomorphisme f tel que ...

24 **Proposition (égalité de deux applications linéaires)**
On suppose que E est équipé d'une décomposition en somme directe $E_1 \oplus E_2$.
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ deux applications linéaires.

$$\left(f_{|E_1} = g_{|E_1} \text{ et } f_{|E_2} = g_{|E_2}\right) \implies f = g$$

En français :
« Si deux applications linéaires coïncident sur des sous-espaces supplémentaires, alors elles sont égales »



VI. Étude du sous-ensemble de $\mathscr{L}(E)$ formé des polynômes en f

25 **Définition (Polynôme d'endomorphisme).** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme.

— Une expression du type $af^2 + bf + c\,\mathrm{id}_E$, où $a, b, c \in \mathbb{K}$, est « un polynôme en f » de degré $\leqslant 2$.

— Un « polynôme en f » est une expression du type

$$a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_2 f^2 + a_1 f + a_0\,\mathrm{id}_E \qquad \text{où } m \in \mathbb{N} \text{ et } a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}.$$

- En introduisant le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, l'expression ci-dessus est notée $P(f)$.
- Résumons.
  Avec un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on peut créer un nouvel endomorphisme, à savoir l'endomorphisme $P(f)$.
- **Cas particuliers extrêmement importants.**
  Pour $P = X^0$, on a $P(f) = \ldots$ Pour $P = X^1$, on a $P(f) = \ldots$ Pour $P = X^2$, on a $P(f) = \ldots$

  Pour $P = X^2 + \alpha X + \beta$, on a $P(f) = \ldots$ Pour $P = (X-a)(X-b)$, on a $P(f) = \ldots$
- **Petits calculs.**
  Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a $f^p \circ f^q = f^{p+q} = f^{q+p} = f^q \circ f^p$.

  Soit $g = 3f + 2\,\mathrm{id}_E$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

26 **Proposition (algèbre des polynômes d'un endomorphisme). A lire seulement**

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Considérons l'ensemble $\mathscr{A}_f$ défini par

$$\mathscr{A}_f = \left\{ g \in \mathscr{L}(E) \mid \exists P \in \mathbb{K}[X],\ g = P(f) \right\} = \left\{ P(f),\ P \in \mathbb{K}[X] \right\} = \left\{ P(f) \right\}_{P \in \mathbb{K}[X]}$$

— $\mathscr{A}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Précisément :

$$P(f) + Q(f) = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \lambda \cdot P(f) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

— $\mathscr{A}_f$ est stable pour la loi $\circ$. Précisément :

$$P(f) \circ Q(f) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En maths, on dit que $\mathscr{A}_f$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\left(\mathscr{L}(E), +, \cdot, \circ\right)$

27 **Définition (Polynôme annulateur pour un endomorphisme).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.
On dit que P est un polynôme annulateur de f lorsque $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = \mathrm{id}_E$. Alors f admet un polynôme annulateur, par exemple ....
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Alors f admet un polynôme annulateur, par exemple ....
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $(f - \lambda_1\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \lambda_2\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Alors f admet un polynôme annulateur ......

28 sol → 16 **Question.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E)$$

Plus généralement, montrer l'énoncé suivant, appelé **Lemme des noyaux** :

Soit $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$. Soit $P = (X-\lambda)(X-\mu) \in \mathbb{K}[X]$.
On suppose que P est un polynôme annulateur de f c'est-à-dire $(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$
Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id}_E)$$

VII. Endomorphismes remarquables

Projection

On rappelle que toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Autrement dit, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
Précisément, pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'égalité

$$M = \frac{1}{2}(M + M^\top) + \frac{1}{2}(M - M^\top)$$

Le projeté de M sur l'espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\frac{1}{2}(M + M^\top)$.
Le projeté de M sur l'espace $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\frac{1}{2}(M - M^\top)$.

Associés à cette somme directe $E = F \oplus G$, il y a deux endomorphismes remarquables :

— la projection sur $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, notée $p_{F/\!/G}$

— la projection sur $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, notée $p_{G/\!/F}$

$$p_{F/\!/G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M + M^\top) \end{array} \qquad \text{et} \qquad p_{G/\!/F} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M - M^\top) \end{array}$$

29 **Définition (projection sur F parallèlement à G)**
Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.
On rappelle que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
La projection sur F parallèlement à G est l'application

$$p_{F/\!/G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array} \quad \text{où } x = x_F + x_G$$

- La projection sur F parallèlement à G, notée $p_{F/\!/G}$, est une application linéaire, et même un endomorphisme de E.
  Plus précisément, c'est l'unique endomorphisme p de E défini par :

$$\forall\, x \in F, \quad p(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in G, \quad p(x) = 0$$

  Cette dernière phrase a bien un sens, car on a vu que pour définir une application linéaire sur $E = F \oplus G$, il **suffit** de se donner les images des vecteurs de F et des vecteurs de G.

  Pour autant, il n'est **pas** vrai qu'un vecteur de E est « ou bien dans F, ou bien dans G ».
- La projection sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme p défini par $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$.
- Bien sûr, on peut intervertir les rôles joués par F et G.
  La projection sur G parallèlement à F est l'application

$$p_{G/\!/F} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_G \end{array} \quad \text{où } x = x_F + x_G$$

  C'est l'unique endomorphisme q défini par $q_{|F} = 0_{\mathscr{L}(F)}$ et $q_{|G} = \mathrm{id}_G$.

30 **Question.**

- On sait que toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de trace nulle et d'une matrice multiple de l'identité.
  Autrement dit, en notant $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ et $D = \operatorname{Vect}(I_n)$, on a $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus D$.
  Exhiber la projection sur D parallèlement à H.
- Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les droites vectorielles $F = \operatorname{Vect}\big((1,0)\big)$ et $G = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big)$. On a (WHY ?) $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
  Exhiber la projection sur F parallèlement à G.

31 **Proposition (propriétés d'une projection)**
Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

— La projection $p_{F/\!/G}$ sur F parallèlement à G vérifie :

(i) $p_{F/\!/G}$ est un endomorphisme de E

(ii) $p_{F/\!/G} \circ p_{F/\!/G} = p_{F/\!/G}$

(iii) $\operatorname{Ker} p_{F/\!/G} = G$

(iv) $\operatorname{Im} p_{F/\!/G} = F$

(v) $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - p_{F/\!/G}) = \operatorname{Im} p_{F/\!/G}$

— Résultats analogues pour la projection $p_{G/\!/F}$.

— On a les relations entre $p_{F/\!/G}$ et $p_{G/\!/F}$:

$$p_{F/\!/G} + p_{G/\!/F} = \mathrm{id}_E \qquad p_{F/\!/G} \circ p_{G/\!/F} = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad p_{G/\!/F} \circ p_{F/\!/G} = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Projecteur



Définition (projecteur)
Un projecteur p de E est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

- Cette égalité s'écrit encore

$$p^2 = p \quad \text{ou encore} \quad p^2 - p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{ou encore} \quad p - p^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

  Autrement dit, le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur du projecteur p.
- L'égalité s'écrit aussi :

$$p \circ (\mathrm{id}_E - p) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{ou encore} \quad (\mathrm{id}_E - p) \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

  Autrement dit, le polynôme $X(1-X)$, qui vaut $(1-X)X$, est un polynôme annulateur de p.
- Un projecteur est rarement un automorphisme. Le seul projecteur de E qui est un automorphisme est l'identité de E.

33 **Proposition (propriétés d'un projecteur)**
Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

— On a $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \operatorname{Im} p$.

— Le projecteur p fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \qquad \text{que l'on peut encore écrire} \qquad E = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - p) \oplus \operatorname{Ker} p$$

- Un vecteur x de E possède une écriture unique sur la somme directe $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, à savoir :

$$x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$$

- Dans la proposition précédente, le projecteur p fait naître une décomposition $E = F \oplus G$ avec $F = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$ et $G = \operatorname{Ker} p$.
Quelle est alors la projection sur F parallèlement à G, notée $p_{F /\!/ G}$?
Et la projection sur G parallèlement à F ?
- Un projecteur p de E fait naître **une** décomposition de E en deux sous-espaces, donc fait naître **deux** projections.
Une projection est p et l'autre projection est $\mathrm{id}_E - p$.

34 **Question.**

- Dans $\mathbb{R}^2$, un projecteur est ...

- L'endomorphisme $f : M \mapsto M + M^\top$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-il un projecteur ?

35 **Définition/Proposition (projecteurs associés). A ne pas apprendre, mais savoir faire les preuves.**

— Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
Alors $\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur. Il est appelé le projecteur associé à p.

— Soit $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs.
On suppose que p et q sont associés, c'est-à-dire que $p + q = \mathrm{id}_E$.

(a) On a $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

(b) Le noyau de l'un est l'image de l'autre :

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$$

(c) On a les décompositions

(une avec que des images, l'autre avec que des noyaux, une avec que des p, l'autre avec que des q)

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q \qquad E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q \qquad E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \qquad E = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} q$$

36 **Attention !**

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Alors cela n'implique pas que f est un projecteur !
- Pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, il n'y a aucune raison pour que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ soient supplémentaires.
Par exemple $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(x, y) \mapsto (y, 0)$ vérifie $\operatorname{Im} f = \ldots$ $\qquad$ $\operatorname{Ker} f = \ldots$

37 **Définition.**
Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.
On rappelle que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
La symétrie de E d'axe F parallèlement à G est l'application

$$s_{F/\!/G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \qquad \text{où } x = x_F + x_G$$

- La symétrie d'axe F parallèlement à G, notée $s_{F/\!/G}$, est une application linéaire, et même un endomorphisme de E.
  Plus précisément, c'est l'unique endomorphisme s de E définie par :

$$\forall x \in F, \quad s(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in G, \quad s(x) = -x$$

  Cette dernière phrase a bien un sens, car on a vu que pour définir une application linéaire sur $E = F \oplus G$, il **suffit** de se donner les images des vecteurs de F et des vecteurs de G.
  Pour autant, il n'est **pas** vrai qu'un vecteur de E est « ou bien dans F, ou bien dans G ».
- La symétrie d'axe F parallèlement à G est l'unique endomorphisme s défini par $s_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{id}_G$.
- Bien sûr, on peut intervertir les rôles joués par F et G.
  La symétrie d'axe G parallèlement à F est l'application

$$s_{G/\!/F} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_G - x_F \end{array} \qquad \text{où } x = x_F + x_G$$

  C'est l'unique endomorphisme t défini par $t_{|F} = -\mathrm{id}_F$ et $t_{|G} = \mathrm{id}_G$.

38 **Question.**
- On rappelle que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
  Exhiber la symétrie d'axe $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les droites vectorielles $F = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$. On a (WHY ?) $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
  Exhiber la symétrie d'axe F parallèlement à G.

39 **Proposition.**
Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

— La symétrie $s_{F/\!/G}$ de E d'axe F parallèlement à G vérifie

(i) $s_{F/\!/G}$ est un endomorphisme de E

(ii) $s_{F/\!/G} \circ s_{F/\!/G} = \mathrm{id}_E$ donc s_F est un automorphisme de E et $s_{F/\!/G}^{-1} = s_{F/\!/G}$

(iii) $F = \mathrm{Ker}\left(s_{F/\!/G} - \mathrm{id}_E\right)$

(iv) $G = \mathrm{Ker}\left(s_{F/\!/G} + \mathrm{id}_E\right)$

— Résultats analogues pour la symétrie $s_{G/\!/F}$.

— On a les relations entre $s_{F/\!/G}$ et $s_{G/\!/F}$:

$$s_{F/\!/G} + s_{G/\!/F} = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad s_{F/\!/G} \circ s_{G/\!/F} = -\mathrm{id}_E \qquad s_{G/\!/F} \circ s_{F/\!/G} = -id_E$$

Involution (ou symétrie)

40 **Définition.**
Une involution (ou symétrie) s de E est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

- Cette égalité s'écrit encore

  $s^2 = s$ ou encore $s^2 - \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou $(s - \mathrm{id}_E) \circ (s + \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou $(s + \mathrm{id}_E) \circ (s - \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

  Autrement dit, le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de l'involution s.
- Une involution s est un automorphisme et l'automorphisme réciproque est s lui-même !
- Comme nous l'avons vu, toute symétrie d'axe F parallèlement à G est une involution, car $s_{F/\!/G} \circ s_{F/\!/G} = \mathrm{id}_E$.
- Est-ce que toute involution peut s'interpréter comme une certaine symétrie ? La réponse est oui, comme nous allons le voir.

41 **Proposition.**
Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une involution.
L'involution s fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$$

- Un vecteur x de E possède une écriture unique sur cette somme directe, à savoir :

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$$

- Dans la proposition précédente, l'endomorphisme s fait naître une décomposition $E = F \oplus G$ avec $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
  Quelle est alors la symétrie d'axe F parallèlement à G, notée $s_{F/\!/G}$?
  Et la symétrie de E d'axe G parallèlement à F ?
- Une involution s de E fait naître **une** décomposition en deux sous-espaces, donc fait naître **deux** symétries.
  Une symétrie est s et l'autre symétrie est $-s$.

42 **Exemples.**
- Dans $\mathbb{R}^2$, une involution est ...
- Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, une involution est ...

VIII. Formes linéaires et hyperplans

43 **Définition.**
Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E admettant une droite vectorielle comme supplémentaire.

44 **Proposition.**

1. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.
2. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

IX. Un premier lien entre application linéaire et matrice

45 **Proposition/Définition.**
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'application $f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ est linéaire.
Elle est appelée *l'application linéaire canoniquement associée à* A.

46 **Définition.**
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— On définit le noyau de A comme étant le noyau de f_A.
Autrement dit
$$\operatorname{Ker} A = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}$$

— On définit l'image de A comme étant l'image de f_A.
Autrement dit (WHY ?)
$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\big(\operatorname{Col}_1(A), \dots, \operatorname{Col}_p(A)\big)$$

- L'égalité $\operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Ker} A$ est une tautologie.
Ainsi, on a :
$$f_A \text{ est injective} \iff \text{l'équation } AX = 0 \text{ n'admet que la solution triviale comme solution}$$

47 **Proposition.**

— En effectuant élémentaires sur les .... d'une matrice, on ne change pas son noyau.
— En effectuant élémentaires sur les .... d'une matrice, on ne change pas son image.

Applications linéaires

Algèbre linéaire, épisode 2

preuve et éléments de correction

28

On veut montrer qu'un vecteur x de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur $y \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id}_E)$ et d'un vecteur $z \in \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{id}_E)$.
Procédons par analyse-synthèse (l'analyse prouve l'unicité sous réserve d'existence et la synthèse prouve l'existence).

On fixe $x \in E$ une fois pour toutes.

Analyse. On suppose qu'il existe $y, z \in E$ tel que $\begin{cases} \text{i)} & y \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id}_E) \\ \text{ii)} & z \in \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{id}_E) \\ \text{iii)} & x = y + z \end{cases}$

On applique f à iii).
On a donc $f(x) = f(y) + f(z)$.
Or d'après i), on a $f(y) = 2y$ et d'après ii), on a $f(z) = 3z$.
Ainsi, on a $\begin{cases} x & = & y & + & z \\ f(x) & = & 2y & + & 3z \end{cases}$
Avec ces deux informations, on va pouvoir tirer y et z en fonction de x et f.
En effectuant $3L_1 - L_2$, on obtient $y = 3x - f(x)$.
En effectuant $L_2 - 2L_1$, on obtient $z = f(x) - 2x$.

Synthèse. On pose $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$.
On vérifie que $\begin{cases} \text{i)} & y \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id}_E) \\ \text{ii)} & z \in \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{id}_E) \\ \text{iii)} & x = y + z \end{cases}$
Une façon agréable de vérifier i) et ii) est de constater que l'égalité $f^2 - 5f + 6\operatorname{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$ s'écrit encore $(f - 2\operatorname{id}_E) \circ (f - 3\operatorname{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou encore $(f - 3\operatorname{id}_E) \circ (f - 2\operatorname{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Ainsi, $(f - 2\operatorname{id}_E)(y) = \big(f - 2\operatorname{id}_E\big)(3x - f(x)) = \Big(-(f - 2\operatorname{id}_E) \circ (f - 3\operatorname{id}_E)\Big)(x) = 0_{\mathscr{L}(E)}(x) = 0_E$.
On vient de montrer que $y \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id}_E)$.

La vérification du point ii) est similaire.

Le point iii) est immédiat car $y + z = (3x - f(x)) + (f(x) - 2x) = x$.

28

Posons $F_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda\operatorname{id}_E)$ et $F_\mu = \operatorname{Ker}(f - \mu\operatorname{id}_E)$.
On veut montrer que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F_λ et d'un élément de F_μ.
Fixons $x \in E$.

Analyse. Supposons qu'il existe $x_\lambda, x_\mu \in E$ tels que $\begin{cases} \text{i)} & x_\lambda \in F_\lambda \\ \text{ii)} & x_\mu \in F_\mu \\ \text{iii)} & x = x_\lambda + x_\mu \end{cases}$

Appliquons f à iii), on obtient :

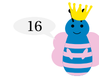
$$f(x) \;=\; f(x_\lambda) + f(x_\mu)$$

En utilisant i) et ii), cette dernière égalité s'écrit $f(x) \;=\; \lambda x_\lambda + \mu x_\mu$.
Résumons. On est en présence de deux égalités :

$$\begin{cases} x & = & x_\lambda + x_\mu \\ f(x) & = & \lambda x_\lambda + \mu x_\mu \end{cases}$$

On cherche x_λ en fonction de x (et de f bien sûr !). Chassons x_μ en réalisant l'opération $\mu L_1 - L_2$:

$$\mu x - f(x) \;=\; (\mu - \lambda) x_\lambda$$



D'où

$$x_\lambda \;=\; \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big) \;=\; \frac{1}{\lambda-\mu}\Big(f(x) - \mu x\Big) \;=\; \frac{1}{\lambda-\mu}(f - \mu \mathrm{id}_E)(x)$$

Pour trouver x_μ en fonction de x, chassons x_λ et réalisons $\lambda L_1 - L_2$:

$$\lambda x - f(x) \;=\; (\lambda-\mu)x_\mu$$

D'où

$$x_\mu \;=\; \frac{1}{\lambda-\mu}\Big(\lambda x - f(x)\Big) \;=\; \frac{1}{\mu-\lambda}(f - \lambda \mathrm{id}_E)(x)$$

Synthèse. Posons $x_\lambda \;=\; \dfrac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big)$ et $x_\mu \;=\; \dfrac{1}{\lambda-\mu}\Big(\lambda x - f(x)\Big)$.

Vérifions que $\left\{\begin{array}{ll} \text{i)} & x_\lambda \in F_\lambda \\ \text{ii)} & x_\mu \in F_\mu \\ \text{iii)} & x = x_\lambda + x_\mu \end{array}\right.$

Remarque : on n'a pas encore utilisé le fait que $(X-\lambda)(X-\mu)$ est un polynôme annulateur de f.
Dans la première preuve **maladroite**, on va utiliser que ce polynôme vaut $X^2 - (\lambda+\mu)X + \lambda\mu$.
Donc $f^2 = (\lambda+\mu)f - \lambda\mu \mathrm{id}_E$. En particulier $f^2(x) = (\lambda+\mu)f(x) - \lambda\mu x$.
Dans la deuxième preuve **plus jolie**, on va utiliser que $(f - \lambda \mathrm{id}_E)\circ(f-\mu \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

▶ i) Montrons que $x_\lambda \in F_\lambda$.
Première preuve maladroite.
Montrons que $f(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$.

$$\begin{aligned}
f(x_\lambda) &= f\Big(\frac{1}{\mu-\lambda}(\mu x - f(x))\Big) \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu f(x) - f^2(x)\Big) \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu f(x) - (\lambda+\mu)f(x) + \lambda\mu x\Big) \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(-\lambda f(x) + \lambda\mu x\Big) \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big) \\
&= \lambda x_\lambda
\end{aligned}$$

Deuxième preuve beaucoup plus jolie.
Montrons que $(f - \lambda \mathrm{id}_E)(x_\lambda) = 0_E$.
Commençons par remarquer que x_λ s'écrit à l'aide de l'endomorphisme $f - \mu \mathrm{id}_E$:

$$x_\lambda \;=\; \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big) \;=\; \frac{1}{\lambda-\mu}(f - \mu \mathrm{id}_E)(x)$$

Appliquons l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ à x_λ ; on obtient :

$$(f - \lambda \mathrm{id}_E)(x_\lambda) \;=\; \frac{1}{\lambda-\mu}(f - \lambda \mathrm{id}_E)\circ(f - \mu \mathrm{id}_E)(x) \;=\; \frac{1}{\lambda-\mu}0_{\mathscr{L}(E)}(x) \;=\; 0_E$$

▶ ii) Même principe que i).

▶ iii) On a

$$x_\lambda + x_\mu \;=\; \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big) + \underbrace{\frac{1}{\lambda-\mu}\Big(\lambda x - f(x)\Big)}_{= \frac{1}{\mu-\lambda}\big(f(x) - \lambda x\big)} \;=\; \frac{1}{\mu-\lambda}(\mu x - \lambda x) \;=\; x$$